Differentialgleichungen (als DG abgekürzt)

Differentialgleichungen gehören nicht zum Themenkatalog der Schulmathematik. Allenfalls in Leistungskursen kann es dazu kommen, dass man damit konfrontiert wird. Dabei haben sie eine große Bedeutung insbesondere in den Naturwissenschaften, wie Physik und Astrophysik. Mir sind sie als Begriff in einem Buch über die Schwerkraft begegnet, dass solche Phänomene wie schwarze Löcher, Neutronensterne und Gravitationswellen zum Thema hatten. Diese Dinge sind zum großen Teil schon in Albert Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie berechnet worden. Die mathematischen Gleichungen, die dahinter stehen, sind Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen, die nur von wenigen Physikern verstanden werden und zu den kompliziertesten Dingen gehören, die die Mathematik zu bieten hat. Ohne mir je anmaßen zu wollen, auch nur einen Hauch davon zu verstehen, hat es mich doch interessiert, wie so etwas aussieht, und ob man zumindest ansatzweise die Grundlagen verstehen kann.

1. Was ist eine DG?

‚Normale Gleichung' mit einer oder zwei Zahlen als Lösung:

$2x - 5 = 3$ oder $x^2 - 9 = 0$

Differentialgleichungen enthalten Funktionen und deren Ableitungen

Differentialgleichungen
$Y' = 2y + 3x$
Die Lösung einer DG ist nicht eine Zahl, sondern eine Gleichung

Bsp.: Die Lösung der DG $Y' = x$ lautet $Y = \frac{1}{2}x^2 + C$

Um eine eindeutige Lösung zu finden, benötigt man noch einen Anfangswert, mit dem man die Integrationskonstante C bestimmen kann. Beispielsweise f(0) = 1 oder f(6) = 2.

2. Wo werden DG benötigt?

Ableitungen von Funktionen beschreiben in der Wissenschaft die Veränderung oder die Änderungsrate eines Vorgangs. Dies kann z. B. die Geschwindigkeit oder die Wachstumsrate sein.
Anhand dieser beobachtbaren Änderungsrate wird versucht, durch Lösen einer DG auf die Funktion zu schließen, um Vorhersagen über die weitere Entwicklung des betrachteten Systems treffen zu können.
Kurz: Man betrachtet die Veränderung eines Zustandes, und möchte wissen wie es dazu kam.

Beispiel: Wenn Y die Lage eines Ortes beschreibt, dann ist Y' die Änderung der Lage und damit die Geschwindigkeit.
Bei einer fallenden Kugel ist Y der Ort und $v(t) = Y'(t)$ die Geschwindigkeit.
Dann ist $v'(t) = Y''(t)$ die Beschleunigung bzw. die Änderung der Geschwindigkeit.
Im freien Fall gilt a(Beschleunigung) = g (Gravitationskonstante).

Nach Newton gilt: F(Kraft) = m·a, dann ist im freien Fall F = m·g = m·v'(t) oder m·Y''(t)

Die Lösung ist dann $Y'(t) = a \cdot t + C_1$ und $Y(t) = 0{,}5at^2 + C_1t + C_2$

3. Welche Formen von Differentialgleichungen gibt es?

Gewöhnliche – partielle DG
Bei einer gewöhnlichen DG kommen die Ableitungen nur für eine Variable vor:
Bsp: $Y'' = Y' + y + 4x$ oder $Y' = f(x)$

Bei einer partiellen DG kommen auch Ableitungen für andere Variablen vor:
Bsp: $Y' = 2y + x' + 3x$ oder $Y' = f(x)\, g(y)$. Diese sind schwierig zu lösen.

Die gesuchte Funktion ist jeweils eine Funktion y oder f(x). Die Größe x ist also nicht mehr die gesuchte Unbekannte, nach der die Gleichung aufgelöst wird, sondern die Funktion f(x) wird gesucht.

DG 1. Ordnung – DG höherer Ordnung

Kommt nur die erste Ableitung Y' vor, spricht man von DG 1. Ordnung: $Y' = 2Y$
Kommen mehrere Ableitungen vor, spricht man von n ter Ordnung: $Y'' + y' + y = 0$ 2. Ordnung

Beispiel: $f'(x) = x^2$ oder $y' = x^2$,in Worten: Gesucht ist die Funktion f, deren Ableitung die Funktion x^2 ist. Bzw. gesucht sind alle Funktionen, deren Ableitung die Funktion x^2 ist.

Lineare und nicht lineare DG

Bei linearen DGs kommt Y nur in der ersten Potenz vor, bei nicht linearen DGs kommt y auch mit höheren Exponenten vor. Bsp.: $Y' = 2Y$ bzw. $Y' = Y^2$

Homogene und nicht homogene DG

Nicht homogene DGs beinhalten eine sog. Störfunktion, die kein y enthält.
Bsp.: $y' + 2y = e^x$, wobei e^x die Störfunktion ist. Oder auch $Y'' - x^2 = 0$.

Bei der Lösung einer DGL entstehen immer eine oder mehrere Integrationskonstanten (je nach Grad der DGL). Wenn diese Konstanten nicht bestimmt werden können, spricht man von einer **allgemeinen Lösung** der DGL. Wenn es aber eine Anfangsbedingung für einen speziellen Fall gibt, dann erhält man Werte für die Konstanten und spricht von einer **partikulären Lösung** der DGL.

DG mit konstanten Koeffizienten, bzw. ohne konstante Koeffizienten

Bei DGLs mit konstanten Koeffizienten haben die gesuchte Funktion (meist y) und ihre Ableitungen nur eine konstante Zahl als Koeffizienten (Beizahl). $Y'' + 2y' - 5y = 0$.
Keine konstanten Koeffizienten wären z. B. xY' oder $\sin(x)\, y'$ usw.

4. Wichtige DGs und ihre Stammfunktionen

DGL Y‘	Lösung Y
a	ax + C
a^x	$(a^x) : (\ln a) + C$
e^x	$e^x + C$
$e^{a \cdot x}$	$(1/a)e^{a \cdot x} + C$
1/x	ln x + C
$1/x^2$	Über $x^{-2} \rightarrow -x^{-1} = 1/x$
sin x	– cos x + C
cos x	sin x + C
$\sin^2 x$	$0{,}5 \cdot (x - \sin x \cdot \cos x) + C$
$\cos^2 x$	$0{,}5 \cdot (x + \sin x \cdot \cos x) + C$
tan x	– ln (sin x) + C
$f'(x) \cdot f(x)$	$0{,}5 \cdot (f(x))^2 + C$
$f'(x) \cdot f(x)^n$	$(1/(1+n)) \cdot (f(x))^{n+1} + C$
$f'(x) : f(x)$	$\ln (f(x)) + C$

5. Wie werden Differentialgleichungen gelöst?

Zur Lösung von Differentialgleichungen gibt es verschiedene Lösungswege. Letztlich interessiert nur das Ergebnis, welches in die Ausgangsgleichung eingesetzt wird, um zu überprüfen, ob die Gleichung erfüllt ist. Dennoch braucht es eine Menge Erfahrung, um den richtigen Lösungsansatz zu finden. Ein Weg der Veranschaulichung der Lösung ist die Darstellung eines **Richtungsfeldes**. Dazu setzt man x und y-Werte in die Ausgangsgleichung ein und bestimmt die Ableitung. Den Ableitungswert stellt man dann in einem Koordinatenkreuz an der Stelle x,y durch einen Richtungspfeil dar, der ungefähr die Richtung des Wertes der Ableitung anzeigt. Anschließend überlegt man, wie eine Stammfunktion dazu aussehen könnte.

Bei vielen Differentialgleichungen spielt die e-Funktion eine Rolle. Warum ist das so? In vielen Fällen taucht ein Ausdruck der Form $\frac{dy}{y}$ auf, von dem das Integral bestimmt werden soll.

Wenn man die Potenzregel anwendet, so kann man auch schreiben y^{-1} und würde beim Integrieren $\frac{1}{0}y^0$ erhalten. Da hier die 0 im Nenner eines Bruches steht, ist dieser Ausdruck nicht möglich. Stattdessen ergibt sich $\ln|y|$. Wenn dieser Ausdruck aufgelöst werden soll, muss man die natürliche Exponentialfunktion anwenden, wonach man auf der linken Seite y erhält und auf der rechten Seite eine Potenz mit e als Basis.

6. Lösungsansätze

Je nach Funktionstyp gibt es drei Lösungsansätze, mit denen man die meisten DGLs angehen kann:

1. Gleichungen, in denen die Stammfunktion und die Ableitung vorkommen, werden über die e-Funktion gelöst (Y‘ = Y).

2. Gleichungen mit Ableitungen von y und Parametern, in denen x vorkommt, werden über ein Polynom gelöst (Y‘‘ = 2x).

3. Gleichungen, in denen Winkelfunktionen vorkommen, werden über trigonometrische Funktionen gelöst.

Allerdings gibt es viele Typen von DGL, für die spezielle Lösungsstrategien gelten, die hier nicht weiter behandelt werden können.

Beispiele:

zu 1. Y‘ = 2y   der Lösungsansatz erfolgt über eine e-Funktion

der allgemeine Lösungsansatz lautet: $y = c\cdot e^{\lambda x}$

$\frac{dy}{dx} = 2y$ | :y | ·dx

$\frac{1}{y}dy = 2dx$ | Integral

$\ln|y| = 2x + c$ | $e^{()}$

$y = e^{2x+c} = e^c \cdot e^{2x} = c \cdot e^{2x}$ da e^c eine Konstante ist

Diese Lösung hätte man auch ohne Rechnung direkt über den Lösungsansatz finden können

zu 2. Y‘ = 2x   der Lösungsansatz ist ein Polynom 2. Grades der Form $ax^2 + c$

$\frac{dy}{dx} = 2x$ | ·dx

dy = 2xdx | Integral

$y = x^2 + c$ | hier ist die Lösung direkt durch die Aufleitung erkennbar

zu 3. Y‘ = sin(x)   Lösungsansatz ist die Aufleitung der Sinusfunktion

y = - cos(x) + c

Lösungsverfahren mit Beispielen

Grundsätzlich werden DGs durch die Umkehrung des Differenzierens also durch Integralbildung gelöst.

Bsp.: Die Lösung der DG Y‘ = 2x ist $Y=x^2 + C$ (beachte die Konstante C)

In der expliziten Schreibweise werden DGs nach der höchsten Ableitung umgestellt.

Y‘‘‘=Y‘‘ + Y‘ + Y + 2x

Schreibweise mit **Differentialoperator:** Y‘ = f‘(x) = $\frac{d}{dx}f(x)$ identische Schreibweisen für die 1. Ableitung oder f‘ = $\frac{df}{dx}$ (wenn nach x abgeleitet wird)

Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 4$, $f'(x) = 6x$ oder $\frac{d}{dx} f(x) = 6x$ bzw: $Y'' = \frac{d}{dx} f'^{(x)} = 6$ oder $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x)$

7. Beispiele für unterschiedliche Typen von DGs

7.1 Lösungsweg für homogene DGs mit konstanten Koeffizienten

(heißt, die Faktoren vor der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen sind feste Zahlen und keine Funktionen)

$Y'' + ay' + by = 0$ allgemein: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (a und b sind die konst. Koeffizienten)
Solche Gleichungen lassen sich mit Exponentialfunktionen oder aus einer Kombination aus Sinus- und Kosinus-Funktionen lösen. Typische Anwendungen gibt es in der Physik, der Technik oder der Mathematik.
Die Gleichung hat 1 reelle, 2 reelle oder eine einfach komplexe oder zweifach komplexe Lösung

Eine reelle Lösung: $y = e^{\lambda x}$
Zwei reelle Lösungen: $\underline{y1 = e^{\lambda x}}$ und $y2 = xe^{\lambda x}$
Einfach komplexe Lösung: $Y1 = e^{ax} \cdot \cos(bx)$ oder $Y2 = e^{ax} \cdot \sin(bx)$
Zweifach komplexe Lösung: $Y1 = e^{ax} \cdot \cos(bx)$ oder $Y2 = xe^{ax} \cdot \cos(bx)$
bzw. $Y1 = e^{ax} \cdot \sin(bx)$ oder $Y2 = xe^{ax} \cdot \sin(bx)$

Die allgemeine Lösung lautet: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

<u>allgemeine Lösung:</u>

$ay'(x) + by(x) = 0$
$y'(x) = -\frac{b}{a} y(x)$ allgemein gilt dann: $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $y' = \lambda e^{\lambda x}$ | : $e^{\lambda x}$
$\lambda = -\frac{a}{b}$ und $\mathbf{y = c \cdot e^{\frac{b}{a}x}}$

<u>Beispiel 1:</u>

$Y' = 2y$
$\frac{dy}{dx} = 2y$ | · dx | : y

$\frac{1}{y}$ dy = 2 dx | Integral

$\mathrm{Ln}|y| + c_1 = 2x + c_2$ | c2 – c1 = c
$\ln|y| = 2x + c$ | Integral
$\mathbf{y = e^{2x+c}}$ **oder** $\mathbf{Y = c \cdot e^{2x}}$
Probe: $y' = 2c \cdot e^{2x}$ dann gilt die Ausgangsgleichung: $2c \cdot e^{2x} = 2(c \cdot e^{2x})$

<u>Beispiel 2:</u>

$3y' + 2y = 0$ mit $y(0) = 2$

Dann gilt nach obigem Ansatz: $y = c \cdot e^{\frac{-2}{3}x}$ mit c = 2
Lösung: $y = 2 \cdot e^{\frac{-2}{3}x}$

<u>Beispiel 3</u>: DGL höheren Grades

$Y'' = 1$ mit $y(0) = 1$ und $y(1) = 3$
$y' = x + 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 + cx + d$

$1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + c \cdot 0 + d \rightarrow d = 1$

$3 = \frac{1}{2} + 1 + c \rightarrow c = 1{,}5$ $\qquad$ $\mathbf{y = \frac{1}{2}x^2 + 1{,}5x + 1}$

<u>Beispiel 4</u>: DGL höheren Grades

$Y'' - 8Y' + 16y = 0$ $\qquad$ Lösungsansatz $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ $\qquad$ $\lambda = 4$ (doppelte reelle Lösung)

also $y1 = e^{4x}$ und $y2 = xe^{4x}$

allgemeine Lösung: $y = c_1y_1 + c_2y_2$ hier $\mathbf{y = c_1\, e^{4x} + c_2\, xe^{4x}}$ allg. Lösung, wenn keine Anfangswerte.

<u>Beispiel 5</u>: mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 3$

$2y'' - 10y' - 12y = 0 \quad | : 2$

$y'' - 5y' - 6 = 0$ $\qquad$ $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$ (zwei reelle Lösungen)

$y_1 = e^{6x}$ und $y_2 = e^{-x}$

allg. Lösung: $y = c_1y_1 + c_2y_2$ hier: $\mathbf{y = c_1\, e^{6x} + c_2\, e^{-x}}$ und $\mathbf{y' = 6c_1\, e^{6x} - xc_2\, e^{-x}}$

Einsetzen der Anfangswerte $c_1\, e^0 + c_2\, e^0 = 1$, $c_1 + c_2 = 1$

$6c_1\, e^0 - c_2\, e^0 = 3$, $6c_1 - c_2 = 3$

dann (1) $6c_1 - c_2 = 3$ (2) $c_1 + c_2 = 1$ Addition: $7c_1 = 4 \rightarrow c_1 = \frac{4}{7}$, $c_2 = \frac{3}{7}$

$\mathbf{y = \frac{4}{7}\, e^{6x} + \frac{3}{7} e^{-x}}$.

<u>Beispiel 6:</u>

$Y'' + 6y' + 10y = 0$ Lösungsansatz $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ $\qquad$ $\lambda_1 = -3 + i$, $\lambda_2 = -3 - i$ (einfache komplexe Lösung)

$Y_1 = e^{-3x} \cdot \cos(bx)$ und $Y_2 = e^{-3x} \cdot \sin(x)$

allgemein: $y = c_1y_1 + c_2y_2$ hier $\mathbf{y = c_1\, e^{-3x} \cdot \cos(x) + c_2\, e^{-3x} \cdot \sin(x).}$

<u>Beispiel 7:</u> Homogene DG 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$Y'' - 8y' + 15y = 0$

1. Aufstellen einer Gleichung 2 .Grades mit einer neuen benannten Variablen, die als Gleichung 2. Grades gelöst werden kann.

$Z^2 - 8Z + 15 = 0$

2. Bestimmen der Lösungen

$Z1 = 5, Z2 = 3$

3. Es gibt drei Fälle, je nachdem, ob die Gleichung 2, 1 oder keine reelle Lösung hat.
   Für jeden Fall gibt es eine eigene Lösungsformel.

   2 Lösungen: $Y = ae^{Z1 \cdot x} + be^{Z2 \cdot x}$ $\qquad$ a und b sind Konstante

   1 Lösung: $Y = (a + bx)\, e^{Zx}$

Keine Lösung (komplexe Lösung, z. B. K = 7 +/- 3i): $Y = e^{\alpha x}$ (a sin β + b cos βx), wobei α der reelle Teil der Lösung (hier 7) ist und β die Vorzahl des imaginären Teils (hier 3) ist.

4. In den richtigen Lösungsansatz einsetzen

   $Y = ae^{5x} + be^{3x}$ Dies ist die Lösung

5. Wegen der Konstanten a und b ist die Lösung nicht eindeutig. Für eine eindeutige Lösung müssten noch Anfangs- oder Randwerte bekannt sein.

7.2 Beispiele für lineare, homogene DGL 1. Ordnung

Allgemein: Y' = f(y) · g(x)
Die Lösung erfolgt nach dem Schema:

1. Ersetzen von Y' durch den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$

2. Trennung von x und y

3. Integration beider Seiten und umstellen nach Y

Beispiel 1:

Y' – 2x = 0 mit f(0) = 1
y' = 2x
$\frac{dy}{dx} = 2x$ | · dx
dy = 2x dx | Integral

$Y = x^2 + c$ | Anfangswert einsetzen
1 = c
$Y = x^2 + 1$

Beispiel 2:

y' = y · x mit Randwert y(4) = 3

$\frac{dy}{dx} = y \cdot x$ | · dx | : y

$\frac{1}{y}$ dy = x dx | Integral und die Grenzen 4 und 3 einsetzen
$\ln|y| - \ln|3| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}4^2$

$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 - 8 + \ln|3|$ | $e^{()}$

$y = e^{\frac{1}{2}x^2} - e^8 + 3$ | e^8 und 3 sind konstante

$y = e^{\frac{1}{2}x^2} + c$

Beispiel 3:

$x \cdot y' - \frac{e^{y+2}}{x} = 0$ |2. Term nach rechts

$x \cdot y' = \frac{e^{y+2}}{x}$ | :x

$y' = \frac{e^{y+2}}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = e^{y+2} \cdot \frac{1}{x^2}$ | $\cdot dx$ | $: e^{y+2}$

$\frac{1}{e^{y+2}} dy = \frac{1}{x^2}\, dx$ | Integral $\frac{1}{e^{y+2}} = e^{(y+2)\cdot 1}$

$-e^{-y-2} = -x^{-1} + c$ | $\cdot(-1)$ dann nach y auflösen

$e^{-y-2} = \frac{1}{x} - c$ | ln

$-y - 2 = \ln(\frac{1}{x} - c)$ | $+2$ | $\cdot(-1)$

$y = -\ln(\frac{1}{x} - c) - 2$

Beispiel 4: mit Anfangswert

$Y' = y^2 \cdot x$ P(0/1)

$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x$ | $\cdot dx$

$dy = y^2 \cdot x\, dx$ | $: y^2$

$\frac{1}{y^2} dy = x\, dx$ | Integral $(\frac{1}{y^2} = y^{-2})$

$-y^{-1} = \frac{1}{2}x^2 + C$

$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$ | $\cdot(-y)$

$1 = (-\frac{1}{2}x^2 - C) \cdot y$

$Y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C} = -\frac{2}{x^2} + c$ Dies ist die allgemeine Lösung

Koordinaten von P in eine passende Gleichung einsetzen:

$1 = (0 + C) \cdot 1$ $\rightarrow C = 1$

$Y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1}$ Dies ist die explizite Lösung

Probe mithilfe der Quotientenregel

$Y' = -\frac{x}{\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1}$ $Y^2 = -\frac{1}{\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1}$

$-\frac{x}{\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1} = -\frac{1}{\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1} \cdot x$

Beispiel 5: Nicht-lineare DGL

$y'y^3 = e^x$ mit f(0) = 3

$\frac{dy\frac{1}{3}\mathbf{e3x + C)\ e{-}2x}}{dx} y^3 = e^x$ | dx

$y^3 dy = e^x\, dx$ | Integral

$\frac{1}{4}y^4 + c_1 = e^x + C_2$ | $\cdot 4$ | $c_2 - c_1 = c$

$y^4 = 4e^x + 4c$ | 4. Wurzel

y = $\sqrt[4]{\mathbf{4e^x + 4c}}$ evtl. noch vereinfachen y = $\sqrt{2}\sqrt[4]{e^x + c}$

Einsetzen

3 = $\sqrt{2}\sqrt[4]{1 + c}$ $\frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{1 + c}$ $\frac{81}{4}$ = 1 + c c = $\frac{77}{4}$

y = $\sqrt[4]{\mathbf{4e^x + 77}}$

alternativ mit Einsetzen der Integralgrenzen

$\int_3^y y^3 dy = \int_0^x e^x$ → $\left[\frac{1}{4}y^4\right]_3^y$ = $[e^x]_0^x$

$\frac{1}{4}y^4$ - $\frac{81}{4}$ = $e^x - 1$ → $\frac{1}{4}y^4$ = $e^x + \frac{77}{4}$ | · 4

y^4 = $4e^x + 77$ **y =** $\sqrt[4]{\mathbf{4e^x + 77}}$

Beispiel 6: mit Trennung der Variablen

y' = $2xy^2$ und y(0)=1

$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$ |·dx :y^2

dy$\frac{1}{y^2}$ = 2x dx | Variablen sind getrennt |Integral $\frac{1}{y^2} = y^{-2}$

$-\frac{1}{y}$ + c_1 = x^2 + c_2 → $c_2 - c_1$ = c

$-\frac{1}{y}$ = x^2 + c | · y

-1 = y(x^2 + c) |: (x^2 + c)

y = $-\frac{1}{x^2+c}$

Einsetzen: y(0) = 1

1 = -$\frac{1}{c}$ | · c → c = -1

y = $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2-1}}$

Wir machen hier mal die Probe

y' = $-\frac{2x}{x^4-2xc+c^2}$ nach der Quotientenregel

einsetzen in Ausgangsgleichung: $\frac{2x}{x^4-2xc+c^2}$ = 2x($\frac{1}{x^2-c}$)^2 = $\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x^4-2xc+c^2}}$

Beispiel 7: mit Trennung der Variablen

y' = (y + 1) sin(x) mit y(0) = 4

$\frac{dy}{dx}$ = (y + 1) sin(x) |· dx : (y+1)

$\frac{dy}{y+1}$ = sin(x) dx | Integral

ln|y+1| + c1 = -cos(x) + c2 → ln|y+1| = -cos(x) + c |e^x

y = $e^{-\cos(x) + c}$ -1 → y = $e^c \cdot e^{-\cos(x)}$ -1 → y = c · $e^{-\cos(x)}$ -1

Startwert einsetzen

4 = c · e^{-1} -1 → 5 = c · e^{-1} → 5 = c · $\frac{1}{e}$ c = 5e

y = 5e · $\mathbf{e^{-\cos(x)}}$ **-1**

Beispiel 8:

Y'' = 2x – 1 f(0) = 1 und f(6) = 1

y' = x^2 - x + C_1

Y = $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ + C_{1x} + C_2 Allgemeine Lösung

Einsetzen:

$f(0) = 1 \quad 1 = 0 - 0 + 0 + C_2 \quad \rightarrow C_2 = 1$

$f(6) = 1 \quad 1 = \frac{6^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 6C_1 + 1 \qquad | -1$

$0 = 72 - 18 + 6C_1 \qquad \rightarrow -54 = 6C_1 \qquad \rightarrow C_1 = -9$

$Y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 9 + 1$ spezielle Lösung

Beispiel 9:

$Y' = \sqrt{x}\, y$ mit f(4) = 1

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \cdot y$ | : y | · dx Trennung der Variablen

$\frac{dy}{y} = \sqrt{x}\ dx$

$\frac{1}{y} = \sqrt{x} \cdot dx$ Integral

$\ln |y| + c_1 = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c^2 \qquad c_2 - c_1 = c$

$\ln |y| = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

$|y| = e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c}$

$y = e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} \cdot e^c$

$y = c \cdot e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$ Das ist die allgemeine Lösung

einsetzen

$1 = c \cdot e^{\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}}$

$1 = c \cdot e^{\frac{16}{3}}$

c = 0,0048….

$y = 0{,}0048 \cdot e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$

7. 3 Lösungswege für inhomogene DGLs mit Variation der Konstanten

$Y'' + 8y' + 7y = 14$ mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = 2$

$z^2 + 8z + 7 = 0$ homogener Teil

$z1 = -1,\ z2 = -7$

zwei reelle Lösungen mit den Basislösungen $y1 = ce^{\lambda x}$ und $y2 = xe^{\lambda x}$

homogene Lösung: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-7x}$

partikuläre Lösung: $y = Ax + c_2$

Beispiele für inhomogene DGL der Form $y' + f(x)y = g(x)$ allgemeine Lösung $Y = Y_{homogen} + y_{partikulär}$

DGL	Homogene Lösung	Partikuläre Lösung
$y' - 2y = 5x^2$	$Y = c_1e^{2x}$	$Y = ax^2 + bx + c_2$
$Y' + 2y = 5x$	$Y = c_1e^{-2x}$	$Y = ax + c_2$
$2y' + 3y = 5x^2 \rightarrow$ $y' + 1{,}5y = 2{,}5x^2$	$Y = c_1e^{\frac{-3}{2}x}$	$Y = ax^2 + bx + c_2$
$Y' - 5y = 7\cos(3x) + 2\sin(3x)$	$Y = c_1e^{5x}$	$Y = a\sin(3x) + b\cos(3x)$
$Y' + y = 3\cos(4x)$	$Y = c_1e^{-x}$	$Y = a\sin(4x) + b\cos(4x)$
$Y' + 2y = e^{3x}$	$Y = c_1e^{-2x}$	$Y = a\,e^{3x}$
$Y' - 3y = e^{3x}$	$Y = c_1e^{-3x}$	$Y = a\,e^{3x}$

allgemein:

$y' + f(x)\,y = g(x)$ wobei f(x) irgendein Ausdruck ist (z.B. eine konstante Zahl)

Dann ist die Lösung y = homogene Lösung y_h + partikuläre Lösung yp

$Y_h = c\cdot e^{\int f(x)dx}$ und $y_p = \underline{y_h'} \cdot \int \frac{g(x)}{yh}dx$

Die Integrationskonstante wird variiert durch c = c(x)

mithilfe der Produktregel wird y' ermittelt, dann ist $\mathbf{Y_h = c(x) \cdot e^{\int f(x)dx}}$

Beispiel 1:

$y' + 2y = e^x$ den inhomogenen Teil auf 0 setzen und dann den homogenen Teil lösen

$y' + 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -2y$ | dx

$dy = -2y\,dx$ | :y

$\frac{1}{y}\,dy = -2\,dx$ | Integral

$\ln|y| + c_1 = -2x + c2$ | c2-c1 = c

$\ln|y| = -2x + c$ | $e^{()}$

$y = -e^{-2x} + e^c$ | $e^c = c$

$\mathbf{y = c \cdot e^{-2x}}$ **das ist die Lösung des homogenen Teils**

Diese Lösung hätten wir auch mit dem allgemeinen Lösungsansatz gefunden

$y = ce^{\lambda x}$, wobei λ = -a ist (hier 2)

Den inhomogenen Teil durch **Variation der Konstanten** lösen, indem c gleich c(x) gesetzt wird.

$y = c(x) \cdot e^{-2x}$ | Ableiten mit der Produktregel u'v + uv'

$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} + c(x) \cdot (-2x)e^{-2x}$ → $y' = c'(x) \cdot e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x}$

Einsetzen in Ausgangsgleichung ($y' + 2y = e^x$)

$c'(x) \cdot e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x} + 2c(x) \cdot e^{-2x}) = e^x$ dabei fällt der Term $2c(x) \cdot e^{-2x}$ immer weg

$c'(x) \cdot e^{-2x} = e^x$ | : e^{-2x}

$c'(x) = \frac{e^x}{e^{-2x}}$ → $c'(x) = e^{3x}$ | Integral

$\mathbf{c(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C}$ **das ist die partikuläre Lösung**

Einsetzen in die homogene Lösung

$\mathbf{y = (\frac{1}{3}e^{3x} + C)\,e^{-2x} = \frac{1}{3}e^x + C\,e^{-2x}}$

Beispiel 2: inhomogene DG 3. Ordnung

$Y''' - Y'' + 4Y' - 4Y = -6\cos t$

$Z^3 - Z^2 + 4Z - 4 = -6\cos t$ |Polynomdivision

$(Z-1)(Z^2 + 4)$ [1, 2i, - 2i]

hat die Basislösungen e^t, cos(2t), sin(2t)

Einsetzen: $\mathbf{Y(t) = a\,e^{1t} + b\cos(2t) + c\sin(2t) + Y_p(t)}$

Partikuläre Lösung Y_p (t) = A sin(t) + B cos(t) Davon müsste man wiederrum 3 Ableitungen machen, um dann Y''', Y'', Y' und Y wieder einsetzen. Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann für A=1 und B=-1. Dann einsetzen und Y_p (t) ersetzen

$Y_p(t) = \sin(t) – \cos(t)$
$Y(t) = a\, e^{1t} + b \cos(2t) + c \sin(2t) + \sin(t) – \cos(t)$

a, b, und c können nur bestimmt werden, wenn Punkte bekannt sind.

Beispiel 3:

$Y' + 2y = 4x$ inhomogene DGL, da Störfunktion 4x und f(0) = 3

a) homogene Lösung
$y' + 2y = 0$ zu finden über e-Funktion mit $y_h = c\, e^{-px}$
$\frac{dy}{dx} = -2y$ | dx
$dy = -2y\, dx$ | : y
$dy \frac{1}{y} = -2\, dx$ | Integral
$\ln|y| = -2x + C$ | e^x

$Y = e^{-2x + C} = e^c \cdot e^{-2x}$ | da e^c ist eine Konstante

$\mathbf{Y = c \cdot e^{-2x}}$ | das ist die **homogene Lösung**
b) partikuläre Lösung die Störfunktion ist linear der Form ax + b
Y = ax + b und y' = a als Lösungsansatz
y und y' in die Ausgangsgleichung (y' + 2y = 4x) einsetzen
a +2(ax + b) = 4x
a + 2ax + 2b = 4x | Koeffizientenvergleich
2ax + (a + 2b) = 4x + 0 | setzen b = 0
dann gilt: 2a = 4, a = 2 und a + 2b = 0, b = -1
Y = 2x – 1 | das ist die **partikuläre Lösung**
c) allgemeine Lösung durch Addition der homogenen und der partikulären Lösung
$y = c \cdot e^{-2x} + 2x – 1$
d) spezielle Lösung durch Einsetzen des Ausgangswertes f(0) = 3 in die partikuläre Lösung
3 = c -1 -> c = 4 | c in die allgemeine Lösung einsetzen
$\mathbf{y = 4 \cdot e^{-2x} + 2x – 1}$

Beispiel 4: (Ähnlich wie Beispiel 3, aber mit komplexerer Störfunktion)

$Y' +2y = x \cdot e^{-x}$

1. Der homogene Teil hat wie vorher die Lösung $\mathbf{y = c \cdot e^{-2x}}$
(nochmal zur Erinnerung: In der oben eingerahmten allgemeinen Lösung einer DG der Form $y' + f(x)\, y = g(x)$ gilt für die homogene Lösung $Y_h = c \cdot e^{\int f(x)dx}$
Da f(x) hier 2 ist, ist also $\int 2 = 2x$. Im Exponenten steht -2x, da durch Separation der Variablen der Term 2y auf der rechten Seite mit negativen Vorzeichen steht.
2. Variation der Konstanten c
$\mathbf{y = c(x) \cdot e^{-2x}}$ |Ableiten mit der Produktregel u'v + uv'
$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} + c(x) \cdot (-2)\, e^{-2x}$
$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} -2\, c(x)\, e^{-2x}$ | Y' in die Ausgangsgleichung einsetzen
3. $c'(x) \cdot e^{-2x} -2\, c(x)\, e^{-2x} +2(c(x) \cdot e^{-2x}) = x \cdot e^{-x}$

Zusammenfassen

$c'(x) \cdot e^{-2x} = x \cdot e^{-x}$ | : e^{-2x}

$c'(x) = x \cdot e^{x}$ | Integral von $c'(x)$

4. $c(x) = \int x \cdot e^{x}$ | dieser Ausdruck muss partiell integriert werden nach der Formel:

$$\int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}' \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} - \int \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{dx}$$

$\int x \cdot e^{x} dx = x \cdot e^{x} - \int 1 \cdot e^{x}\, dx = x \cdot e^{x} - e^{x} + c_1$

Zusammengefasst: $\mathbf{e^x(x-1) + c_1}$

dann ist $c(x) = (x-1)\, e^{x} + c_1$

5. In die allgemeine (homogene) Lösung einsetzen

$y = (x-1)\, e^{x} + c_1 + c_1 \cdot e^{-2x}$

8. Praktische Beispiele aus Physik und anderen Wissenschaften

Wie schon erwähnt, ergeben sich die wichtigsten Anwendungen für Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften. Besonders in der Astronomie hat man es häufig mit Phänomenen zu tun, bei denen eine Veränderung (Beschleunigung usw.) beobachtet werden kann, ohne dass man die genaue Ursache kennt. Dabei helfen Differentialgleichungen, die den ursächlichen funktionalen Zusammenhang beschreiben können. Dabei geht es häufig um die 2. Ableitung, da diese die Änderung der Steigung angibt und damit die Krümmung der Stammfunktion (auch Raumkrümmung).

a) Man beobachtet einen konstanten Anstieg um den Faktor 0,5 und hat das Wertepaar 10/8

$Y' = 0{,}5$ und $f(10) = 8$ (partikuläre DG)

$\frac{dy}{dx} = 0{,}5$ |· dx

$dy = 0{,}5\, dy$ | Integrieren

$y = 0{,}5x + C$

Einsetzen: $8 = 0{,}5 \times 10 + C$ → $C = 3$

die gesuchte Funktion ist $y = 0{,}5x + 3$

b) Ein Kapital wächst jeweils um 2 % pro Jahr (Verzinsung)

Dann ergibt sich die folgende Differentialgleichung

$K'(t) = 0{,}02\, K(t)$ gesucht ist $K(t)$

Dabei ist die Ableitung der Funktion wieder durch die Funktion selbst ausgedrückt. Dies ist bei der e-Funktion der Fall.

$\frac{dK}{dt} = 0{,}02\, K$ |· dt

$dK = 0{,}02\, K\, dt$ | Integral

$K(t) = K_0\, e^{0{,}02t}$,wobei K_0 als Anfangswert ergänzt werden kann.

c) Bewegungsfunktion.

Die Beschleunigung ist die Veränderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit. Geschwindigkeit ergibt sich aus Weg geteilt durch Zeit. Die Bewegungsfunktion stellt die zurückgelegte Entfernung in Abhängigkeit der Zeit dar. Also ist die Geschwindigkeit die 1. Ableitung und die Beschleunigung die 2. Ableitung der Bewegungsfunktion.

$Y'' = 1{,}5$

$\frac{dy''}{dt} = 1{,}5 \quad | \cdot dt$ und integrieren

$dy' = 1{,}5t + C_1$

$y' = 1{,}5t + C_1$

$\frac{dy}{dt} = 1{,}5t + C_1 \quad | \cdot dt$ und integrieren

$Y = 0{,}75t^2 + C_1t + C_2$

Damit haben wir die allgemeine Bewegungsfunktion. Wollten wir eine bestimmte Funktion erhalten, benötigt man noch zwei Werte, die man einsetzen kann.

Das Newton-Axiom $F = m \cdot a$ ist eine Differentialgleichung, da die Beschleunigung a die 2. Ableitung $d''x/dt''$ darstellt. Der Ansatz für die Lösungsfunktion muss dann ein Polynom 2. Grades sein, der Form $x(t) = at^2 + bt + c$.

Für den Fall, dass $F = 0$ ist, gilt dass $a = 0$ ist und die Masse damit in Ruhe bleibt oder sich gradlinig bewegt. Die Gleichung lautet dann $v_0 \cdot t + r_0$. Wenn F nicht 0 ist, dann ist die Lösung eine Wurfparabel. $\mathbf{x(t) = F_0/2m\ t^2 + v_0 t + r_0}$, wobei r_0 der Startort und v_0 die Startgeschwindigkeit ist.

Mit Differentialgleichungen können physikalische Naturgesetze dargestellt werden. Beispielsweise die Newtonschen Axiome oder die Planetenbewegungen nach Kepler. Die Lösungen sind dann mögliche Bahnkurven. Diese Lösungen findet man nicht so einfach. Meist benötigt man einen Ansatz, der sich aus dem Wissen über das System ergibt.

9. Fazit:

Lösen von Differentialgleichungen ist kein einfaches Unterfangen. Hier wurden einige Beispiele gezeigt, die mit Hilfe von allgemeinen Ansätzen und ein paar Tricks gelöst werden können. Es gibt meist keinen alleinigen Lösungsweg. Viel Erfahrung und Übung ist nötig, um einigermaßen klarzukommen.

Die hier gezeigten Beispiele sind noch weit entfernt von den praktischen Anwendungen in der Physik, Astronomie oder Mechanik, wo Größen wie Beschleunigung, Gravitation oder andere eine Rolle spielen.