

Wie wird die Entwicklung der Corona-Krise gemessen? (1. Mai 2020)

Im Verlaufe der Krise wurden in den Medien unterschiedliche Messgrößen verwendet, um die zahlenmäßige Entwicklung der Infektionen zu beschreiben.

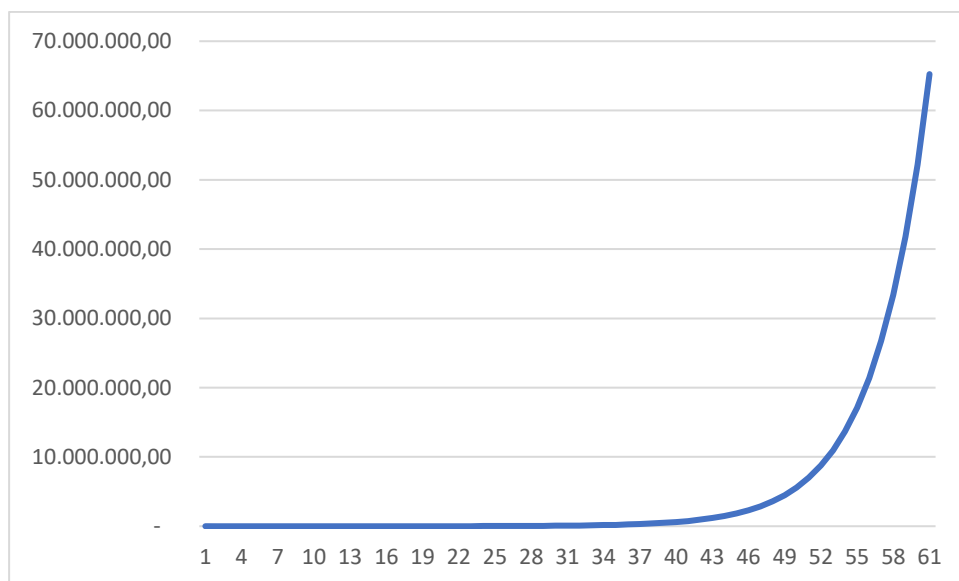
Zu Beginn der Krise sprach man von den Prozentzahlen des exponentiellen Wachstums, rasch wechselte man dann zu der Verdopplungszeit, um dann ab Mitte April die Reproduktionszahl in den Mittelpunkt zu rücken. Warum das so ist, und welche Größen sonst noch eine Rolle spielen, möchte ich nun erläutern. Für mathematisch Interessierte finden sich am Ende einige Rechenbeispiele für die genannten Punkte.

(Da dies keine wissenschaftliche Abhandlung ist, verzichte ich auf die genaue Angabe von Quellen. Im Wesentlichen stütze ich mich auf die Veröffentlichungen des Robert-Koch-Instituts sowie auf die Zahlen der John-Hopkins-Universität, die in den Veröffentlichungen des statistischen Dienstes Statista verwendet werden. Die 4 verwendeten Grafiken wurden mit Excel anhand der Statista-Daten erstellt. Die 5. Grafik (Zeitstrahl) wurde selbst erstellt.

1. Prozentuale Angaben zum Wachstum der Fallzahlen

In den ersten Wochen der Krise stiegen die Zahlen der Infizierten rasant an. Waren es am 1. März vielleicht 100 Infizierte, waren es am 2. März bereits 125, am 3. März 156, am 4. März 196 usw. Nach acht Tagen hatte sich die Zahl vom 1. März etwa versechsfacht. Damals wuchs die Zahl der Infizierten um etwa 25 % pro Tag. Man sprach von einem **exponentiellem Wachstum**. Bei diesem Verlauf wären nach 30 Tagen etwa 80 000 Menschen infiziert gewesen, nach 60 Tagen (also zum jetzigen Zeitpunkt) bereits über 65 Millionen.

Die Grafik veranschaulicht die Entwicklung



Tatsächlich hat die Entwicklung der Fallzahlen in den ersten Wochen etwa in dieser Form stattgefunden. Die tägliche Zunahme der Infizierten wuchs zeitweise sogar um mehr als 25 %.

2. Verdopplungszeit

Ranga Yogeshwar hat in der Talk-Show von Anne Will Anfang März davon gesprochen, dass sich die Zahl der Infizierten innerhalb von 6 Tagen vervierfachen würden. Damit hat er eine andere Sichtweise auf die Entwicklung gegeben, die für Viele einfacher zu verstehen sein mag, weil dafür kein Verständnis für Prozentzahlen erforderlich ist. Durchgesetzt hat sich der Begriff der **Verdopplungszeit**, also die Zeit in Tagen, die es dauert, bis sich die Anzahl der Erkrankten verdoppelt hat. Je länger die Verdopplungszeit, desto langsamer breitet sich das Virus aus.

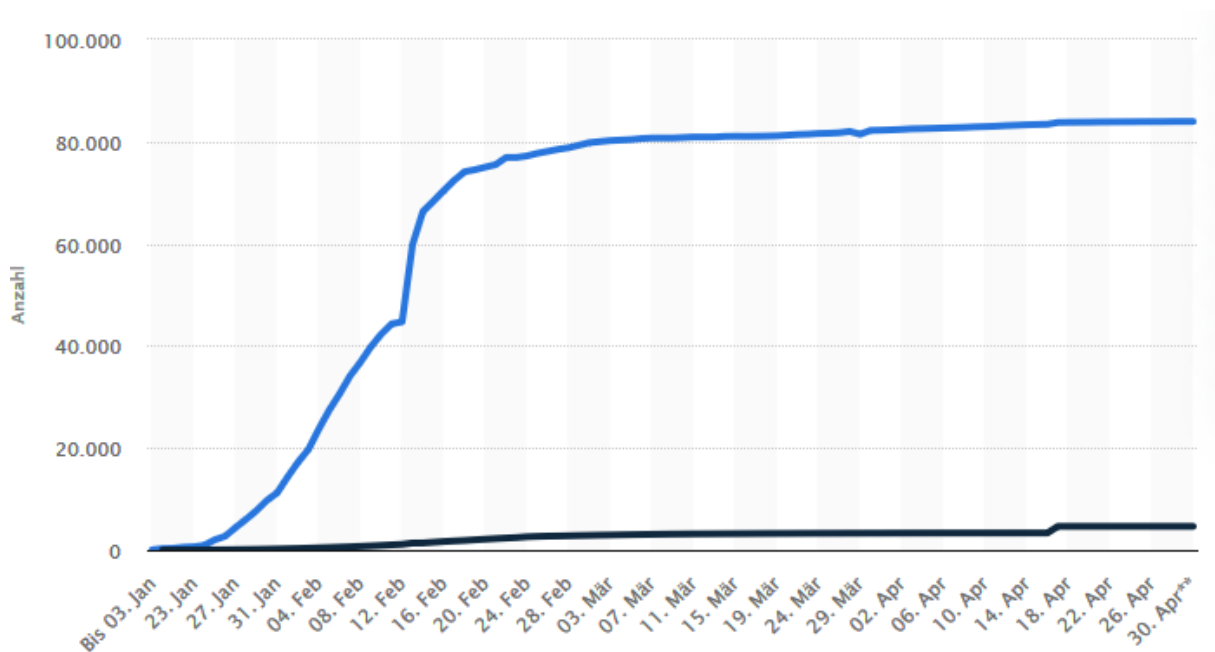
Ein Beispiel soll dies verdeutlichen: Insgesamt sind 10 000 Personen infiziert. Heute kommen 1000 neu erkrankte Personen hinzu. Nun sind es 11 000 Infizierte. Daraus ergibt sich die Wachstumsrate von 1,1. Anhand dieser Zahl kann man errechnen, dass es ca. 7 Tage dauert bis sich die Anzahl der Erkrankten verdoppelt hat (Beispielrechnung siehe unten).

Die Angabe der Verdopplungszeit macht Sinn, wenn die Epidemie noch exponentiell steigt. Wenn die Kurve aber flacher wird, dann gewinnen die bereits wieder Gesunden statistisch immer mehr an Gewicht, so dass die Berechnung der Verdopplungszeit schwieriger und weniger nachvollziehbar wird.

3. Fallzahlen

Die täglichen Fallzahlen und die Zahl der Neuerkrankten sind die wichtigsten Zahlen in der täglichen Statistik zur Corona-Krise. Die Daten hierfür liefert entweder das RKI oder die John-Hopkins-Universität.

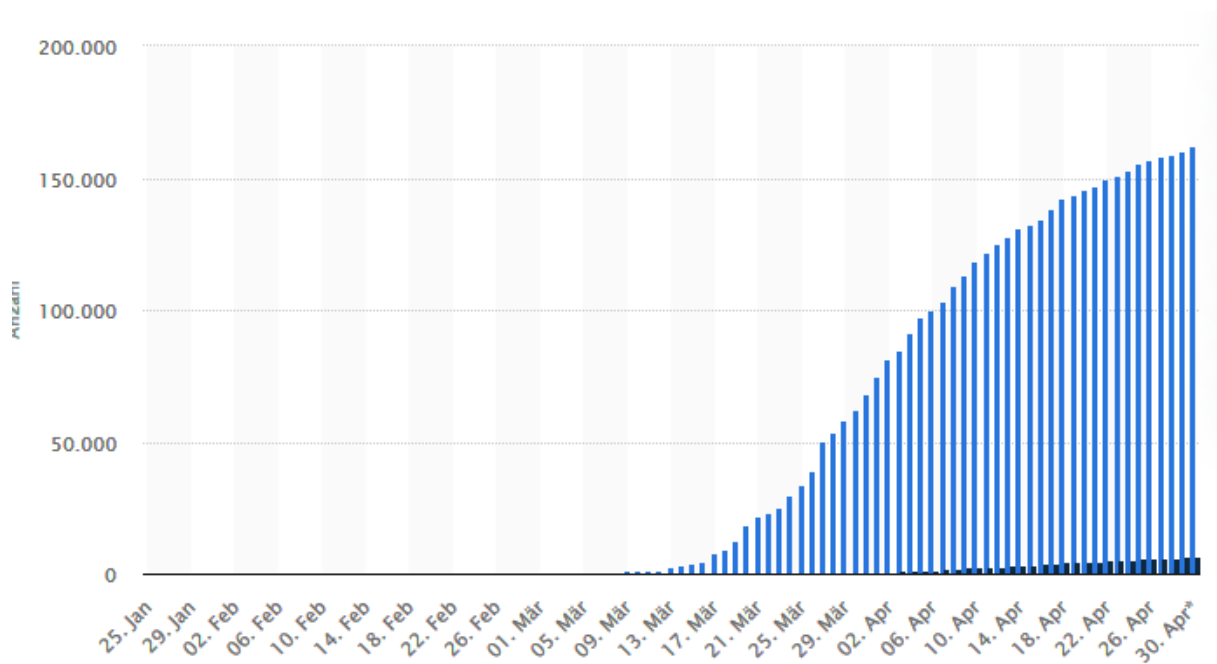
Die täglichen Fallzahlen beinhalten die Anzahl der insgesamt Infizierten Personen. Diese steigen während der Dauer der Epidemie permanent an. Gegen Ende bleiben Sie nahezu konstant. Dass sie nicht sinken liegt daran, dass bei dieser Zahl die Anzahl der wieder Gesunden und die bereits Gestorbenen nicht mit eingerechnet werden. Jeder, der einmal infiziert war, wird zur Fallzahl hinzugezählt.



Dies führt zu der merkwürdigen Erscheinung, dass bei den Fallzahlen in China, diese wochenlang bei etwa 80 000 stehen blieben, ohne aber abzusinken.

Die Fallzahlen in Deutschland liegen derzeit bei über 160 000. Auf dieser Zahl basieren viele Prognosen über weitere Maßnahmen der Verschärfung der Kontrollen oder der Lockerung.

Erkrankungs- und Todesfälle im Zusammenhang mit dem Corona-Virus (Quelle: Statista)



So exakt diese Zahlen auch ermittelt sein mögen, spiegeln sie doch nicht die Realität wider. Zum einen sind von den 160 000 Infizierten inzwischen viele wieder gesund geworden. Auch sind die inzwischen Verstorbenen noch in den Zahlen enthalten. Wenn das RKI die Dauer einer Erkrankung bei ca. 14 Tagen ansetzt, wenn bestimmte Kriterien erfüllt sind, dann sind alle, die vor dem 17. März infiziert wurden, inzwischen wieder gesund. Zieht man dann noch die Todesopfer ab, kommen wir auf aktuell noch etwa 30 000 Personen, die infiziert sind (rechnet man mit einer etwas längeren Infektionsdauer, ist die Zahl entsprechend höher). Wenn dann am nächsten Tag 1000 Personen neue infiziert werden, ist dies ein Zuwachs von 3,3 %. Bei einer sinkenden Zahl der Neuerkrankten muss es so sein, dass irgendwann die Zahl der wieder Gesunden größer ist als die Zahl der Neuerkrankungen. Die Zahl der tatsächlich infizierten müsste dann immer weiter zurück.

Zum Zweiten gibt es eine nicht bezifferbare Anzahl von Fällen, die überhaupt nicht in der Statistik erfasst sind. Alle, die sich keinem Test unterzogen haben, weil der Verlauf der Krankheit nicht so heftig gewesen ist, dass sie einen Arzt aufgesucht haben. Viele Infizierte haben möglicherweise überhaupt nicht gemerkt, dass sie an Corona erkrankt waren. Wie groß diese Dunkelziffer ist, kann nur geschätzt werden. Aufgrund der Sterberate in den einzelnen Ländern kann man evtl. Rückschlüsse auf die Dunkelziffer ziehen. Man geht davon aus, dass es 7 bis 20 Mal so viele Infizierte gibt, wie offiziell erfasst. In Deutschland müsste es nach den Zahlen des Spiegel derzeit ca. 1 Million Covid 19 – Fälle geben. Es ist leider das Dilemma der Wissenschaft, dass es immer noch viel zu wenig Tests gibt, um zuverlässigere Aussagen zu den tatsächlichen Zahlen machen zu können.

4. Die Reproduktionszahl R

Aktuell spricht man von der Reproduktionszahl, wenn man die Entwicklung der Epidemie beschreiben will. Die Reproduktionszahl beschreibt, wie viele Personen ein Infizierter neu ansteckt. Eine Reproduktionszahl von 1,3 heißt, dass Person A 1,3 weitere Personen anstecken wird. Aktuell haben wir Reproduktionszahlen von 0,7 bis 0,8. Das bedeutet dann ein Absinken der Zahl der Neuerkrankten.

Zunächst einmal zu der Frage, warum werden im Verlauf der Epidemie unterschiedliche Messgrößen verwendet, um den Verlauf zu beschreiben? Weiter oben wurde schon gesagt, dass die Verdopplungszeit in der ersten Phase der Krise verwendet wurde, vielleicht auch, um die Bevölkerung

nicht mit Prozentrechnen zu belasten (Rechenbeispiele siehe unten). Eine Verdopplungszeit von 14 Tagen beispielsweise bedeutet eine Wachstumsrate von ca. 5 % pro Tag. Mittlerweile haben wir tägliche Wachstumsraten von unter 1 %, so dass die Verdopplungszeiten an Aussagekraft verlieren, weil sie sehr lang sind (z.B. 70 Tage bei einer Wachstumsrate von 1 %),

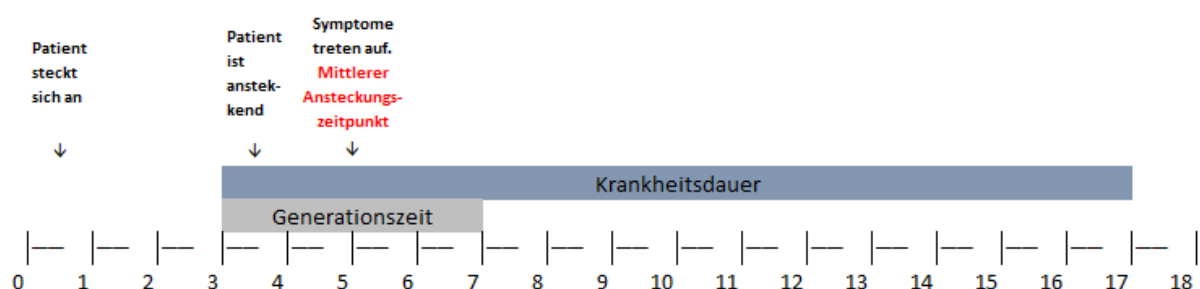
Was also sagt uns die Zahl R? Im Prinzip zunächst mal gar nichts, wenn man einmal davon absieht, dass es gut ist, wenn R möglichst niedrig ist, also einen Wert von deutlich unter 1 hat. Schlecht ist es, wenn R wieder steigt, denn dann steigt auch die Zahl der Infizierten wieder an. Diese Aussage genügt den meisten Menschen schon. Was aber wird wirklich mit der Reproduktionsrate ausgedrückt? Na klar, ein Wert von 1 besagt, dass jeder Infizierte im Schnitt einen weiteren ansteckt. Wichtig aber ist es zu wissen um welchen Zeitraum es geht. Rechnet man mit einem Zeitraum von 4 Tagen, dass ist nach 4 Tagen eine weitere Person infiziert. Da ich selbst auch noch infiziert bin, sind wir dann schon zu zweit. Wenn dieser dann nach 4 weiteren Tagen eine weitere Person ansteckt, sind wir zu Dritt, sofern die beiden ersten noch krank sind. Das geht alle vier Tage so weiter, so lange, bis die ersten wieder gesund werden. Auf jeden Fall pendelt es sich dann auf einen Wert ein, da ja alle vier Tage eine Person neu erkrankt, aber auch eine Person wieder gesund wird.

Das ändert sich, wenn R kleiner oder größer als 1 ist. Ist R größer als 1 nimmt die Gesamtzahl der Infizierten wieder zu. Um welchen Faktor hängt dann entscheidend davon ab, mit welcher Generationszeit und welcher Krankheitsdauer gerechnet wird. So lange man diese Zahlen nicht kennt, hat die Reproduktionsrate keine quantifizierbare Aussagekraft.

Welche Größen bestimmen die Reproduktionszahl R?

Die wichtigsten Begriffe sind die **Generationszeit** und die **Krankheitsdauer**. Unter der Generationszeit versteht man die Zeitspanne der größten Ansteckungsgefahr. Diese beginnt etwa 3 Tage nachdem sich der Patient angesteckt hat und dauert etwa 4 Tage. Wenn kein Test vorliegt, merkt der Patient selbst erst beim ersten Auftreten von Symptomen nach etwa 5 Tagen, dass er möglicherweise infiziert ist. Die Dauer der Krankheit kann nicht genau definiert werden, liegt aber nach Angaben des RKI bei günstigen Umständen bei 14 Tagen.

Da die Ansteckungsdauer 4 Tage beträgt, gehe ich davon aus, dass die Ansteckung weiterer Personen im Mittelwert nach der Hälfte der Generationszeit erfolgt. Das ist dann 5 Tage nach der eigenen Ansteckung.



Eine Reproduktionszahl von 0,7 bedeutet also, dass von 10 Patienten, die heute vor 10 Tagen infiziert wurden, im Mittelwert vor 5 Tagen (3 Tage nach der eigenen Infektion plus im Mittel 2 Tage der Generationszeit) 7 weitere angesteckt worden sind. Diese stecken dann heute (weitere 5 Tage später) wieder die 0,7-fache Anzahl Personen an. Das sind etwa 5 Personen. Insgesamt haben wir jetzt 22 Infizierte. Die ersten 10 Patienten sind nach 4 Tagen (ab heute) wieder gesund. Danach haben wir bis zur nächsten Ansteckung am folgenden Tag nur noch 12 Personen, die infiziert sind. Wenn die Reproduktionsrate gleichbleibt, würde die Zahl der Infizierten nach 6 Wochen auf 1 gesunken sein.

Für alle, die gerne rechnen:

Beispiel 1: Exponentielles Wachstum

Es gibt aktuell 20 000 infizierte Personen. Die tägliche Wachstumsrate beträgt 25 %. Wie viele Infizierte haben wir dann nach 6 bzw. nach 14 Tagen?

Rechnung:

$$20\,000 \times 1,25^6 = 76\,293$$

$$20\,000 \times 1,25^{14} = 454\,747$$

Bei dieser Art Rechnung handelt es sich um eine Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor 1,25. Dieser ergibt sich aus der Überlegung, dass jeder folgende Wert um 25 % größer ist als der vorhergehende. Wenn der vorhergehende 100 % entspricht, dann entspricht der folgende Wert 125 %. Dies entspricht der Zahl 1,25, da Prozent ja ‚von Hundert‘ bedeutet

Beispiel 2: Verdopplungszeit (1)

Aussage: Die Zahl der Infizierten verdoppelt sich innerhalb von 6 Tagen.

Welche tägliche Wachstumsrate steckt dahinter? (in obigen Beispiel haben wir gesehen, dass 25 % Wachstum nach 6 Tagen zu fast einer Vervierfachung führt. Unser gesuchter Wert muss also kleiner sein.)

Ansatz: $10 \times q^6 = 20$ Anfangswert 10 hat sich nach 6 Perioden auf 20 verdoppelt.

Die Zahlen 10 und 20 hätte man auch durch 1 und 2 oder jedes andere Zahlenpaar ersetzen können.

$$q^6 = \frac{20}{10} \quad q = \sqrt[6]{2} = 1,12246$$

Wenn q diesen Wert hat, dann haben wir ein Wachstum von ca. 12 %

Beispiel 3: Verdopplungszeit (2)

Wie lange beträgt die Verdopplungszeit, wenn die Anzahl der Infizierten um 1,5 % pro Tag wächst?

$$\text{Ansatz: } 100 \times 1,015^x = 200$$

Wieder wurden die Zahlen 100 und 200 willkürlich gewählt. Da man zunächst die rechte Seite immer durch den Anfangswert teilt, erhält man in jedem Fall die Zahl 2.

$$1,015^x = \frac{200}{100} = 2 \quad \text{jetzt muss man Logarithmieren}$$

$$x \cdot \log 1,015 = \log 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\log 2}{\log 1,015} = 47 \quad \text{Die Verdopplungszeit beträgt 47 Tage.}$$

Beispiel 4: Reproduktionszahl R

Vereinfacht gesehen wird die Reproduktionszahl dadurch ermittelt, dass die Zahlen der neu Erkrankten aus zwei aufeinanderfolgenden Zeiträumen durch einander dividiert werden.

neu Erkrankte zwischen dem 13. April und dem 21. April: 10500 (Zeitraum 8 Tage)

neu Erkrankte zwischen dem 22. April und dem 30. April: 8500 (Zeitraum 8 Tage)

$$\frac{8500}{10500} = 0,81 \quad \text{Das ist die Reproduktionszahl}$$

So einfach diese Zahl zu berechnen ist: Sie basiert auf Vergangenheitswerten. Die zukünftige Entwicklung hängt von der im Text erwähnten Generationszeit und der Dauer der Erkrankung ab.