

Nun ist es schon fast ein Jahr her, dass uns diese Pandemie in Atem hält. Seitdem haben uns jeden Tag die neusten Zahlen, die vom Robert-Koch-Institut, den Gesundheitsämtern oder anderen Forschungseinrichtungen veröffentlicht wurden, in den Bann geschlagen. Wir wurden mit Wachstumsraten, Verdoppelungszeiten, Fallzahlen, Reproduktionszahlen, Inzidenzen oder Wahrscheinlichkeiten gefüttert, dass uns der Kopf rauchte. Wer mitreden wollte, der sollte die Grundregeln der Prozentrechnung noch im Kopf haben, ein Gefühl für große Zahlen haben, und Wahrscheinlichkeiten abschätzen können. Alle diejenigen, die stolz von sich behaupten, mit Mathe nie was am Hut gehabt zu haben, müssen sich auf Einschätzungen Dritter verlassen, die richtig oder falsch sein können oder abstruse Ansichten verbreiten.

Mediziner, Biologen und Chemiker gewinnen täglich neue Erkenntnisse bei der Erforschung des Virus und der Entwicklung von Gegenmitteln. Bei allem spielt die Mathematik und ihre verlässlichen Regeln und Gesetze eine unverzichtbare Rolle. Die Mathematik hilft uns Laien, die Ausbreitung des Virus, die Wirkung von Gegenmaßnahmen und die Anwendung von Tests und Impfstoffen besser zu verstehen.

Zu Beginn der Pandemie verlief die Ausbreitung des Virus in exponentieller Form. Eine Fortsetzung dieser Entwicklung hätte unweigerlich in kurzer Zeit dazu geführt, dass die gesamte Weltbevölkerung infiziert gewesen wäre. Mundschutz, Hygiene und Abstandsregeln haben dazu geführt, dass diese Entwicklung gebremst wurde und der Anstieg nur noch linear oder gar degressiv verlaufen ist. Dennoch sind die Fallzahlen weiterhin rasant gestiegen. Allerdings können jetzt mathematische Modelle den weiteren Verlauf nicht mehr sicher vorhersagen, weil wir nicht genau wissen, wie die getroffenen Maßnahmen wirken.

Derzeit ist der Fokus auf Testverfahren gerichtet, die feststellen sollen, ob eine Person infiziert ist oder nicht, oder ob sie schon einmal infiziert gewesen ist. Schnelltests sollen möglichst viele Menschen testen, damit Besuche in Altenheimen, Sportwettbewerbe möglich sind oder Flugreisen durchgeführt werden können.

Es gibt verschiedene Testverfahren, die angewendet werden. Die ersten PCR-Test wurden durch Antigen-Schnelltest ergänzt, bei denen das Ergebnis schneller ermittelt werden konnte. Zusätzlich kann ein Antikörpertest feststellen, ob jemand schon einmal infiziert gewesen ist. Neuerdings kommen weitere Testverfahren auf den Markt, die eine noch größere Sicherheit oder ein schnelleres Ergebnis versprechen.

Alle Test haben eine Gemeinsamkeit: Sie sind nicht unfehlbar. Die Nachrichten von fehlerhaften Testergebnissen, häufen sich. Es kam zu medienwirksamen Ereignissen, wie die Sperrung des Nationalspielers Gnabry oder jüngst den positiven Test eines polnischen Skispringers während der Vierschanzentournee, welches zu einem Ausschluss des gesamten polnischen Teams geführt hätte, wenn nicht am folgenden Tag durch einen zweiten Test, der negativ war, die Sperre wieder aufgehoben wurde. Damit konnte ein politischer Konflikt noch einmal verhindert werden.

In meinem letzten Corona-Beitrag habe ich das Phänomen der zahlreichen falsch positiven Testergebnisse eingehend beschrieben. Es ist einleuchtend, dass ein Schnelltest mit einer Spezifität von 96 %, der auf 100 gesunde Skispringer angewendet wird, im Durchschnitt 4 falsch positive Ergebnisse liefern muss. Dafür muss man nicht allzu viel von Mathematik wissen.

Dies bedeutet selbstverständlich nicht, dass Tests unsinnig sind. Tests sind unverzichtbar und sichern die lebensnotwendige Arbeit in Seniorenheimen und Krankenhäusern. Nur durch den Einsatz von Tests sind Sportereignisse durchführbar, können Schulen geöffnet bleiben und ermöglichen Zusammenkünfte vieler Art. Man muss eben nur wissen, dass Tests fehlerbar sind. Es geht tatsächlich weniger darum, dass infizierte Personen nicht erkannt werden, sondern mehr darum, dass eben nicht jedes positive Ergebnis tatsächlich

auf eine Corona-Infektion schließen lässt. Dies werde ich unten noch einmal an einfachen Beispielen zeigen.

Die Aussagekraft von Schnelltests hängt sehr davon ab, wie viele Personen tatsächlich infiziert sind. Je geringer der Anteil der Infizierten ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass ein positives Testergebnis falsch ist. Im Fall eines positiven Testergebnisses ist auf jeden Fall ein zweiter Test erforderlich. Durch einen zweiten Test kann die Gefahr eines falsch positiven Testergebnis deutlich verringert werden.

Beispiel:

Betrachten wir ein Sportereignis mit 1000 Personen (damit wir eine große glatte Zahl zum Kopfrechnen haben). Nehmen wir an, dass diese alle gesund und nicht mit Corona infiziert sind (es wäre rechnerisch auch egal, wenn ein kleiner Anteil infiziert wäre. So lässt es sich nur einfacher berechnen). Alle Teilnehmer müssen sich vor Beginn der Wettbewerbe einem Schnelltest unterziehen. Dieser Test hat eine **Sensitivität** von 98 % (Wahrscheinlichkeit, dass ein Infizierter auch als solcher erkannt wird und ein positives Testergebnis liefert) und eine **Spezifität** von 97 % (Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die nicht infiziert ist, auch ein negatives Testergebnis hat) .

Da es 1000 nicht infizierte gibt, haben durch den Schnelltest 97 %, also 970 Personen, ein negatives Testergebnis. Das bedeutet aber auch, dass 30 Personen positiv getestet werden, obwohl sie nicht infiziert sind. Das ist eine ganze Menge und würde wohl für erheblichen Aufruhr sorgen. Wenn sich nun diese 30 Personen ein zweites Mal testen lassen, dann haben wieder 97 % ein negatives Ergebnis. Das sind rund 29 Personen (genau 29,1). Dann hätte nur noch eine Person (0,9) ein falsch positives Ergebnis. Dass diese Person auch bei einem dritten Test wieder falsch positiv getestet würde, ist dann schon sehr unwahrscheinlich.

Viele Schnelltest habe eine deutlich geringere Spezifität als die im Beispiel genannte. Dann ist der Anteil der falsch positiven Ergebnisse noch höher. Es gilt also: Schnelltests sind wichtig. Aber positiv Getestete müssen sich auf jeden Fall noch ein zweites Mal oder sogar ein drittes Mal testen lassen.

In den letzten Tagen stand das Thema Impfung im Vordergrund. Es ist klar: Nur durch Impfungen kann eine Ausbreitung der Infektion gestoppt werden. Die Rede ist von einer Herdenimmunität, die erreicht werden muss. Dahinter steckt folgende Überlegung:

Wenn man 10 Infizierte hat, die mit einer Reproduktionsrate von 2 andere anstecken, die infizierbar sind, dann werden 20 weitere Personen angesteckt. Nicht infizierbar sind alle Personen, die entweder immun sind, weil sie die Krankheit schon hatten oder weil sie geimpft sind. Infizierbar sind dann alle Personen, die noch nicht infiziert waren oder die bereits geimpft sind.

Nehmen wir an, die 10 Infizierten haben Kontakt mit 100 Personen, die weder geimpft noch immun oder selbst infiziert sind. Dann würden 20 davon infiziert werden. Wenn von den 100 Personen aber 50 immun, selbst infiziert oder geimpft sind, dann hat das Virus nur bei der Hälfte der Personen Erfolg, kann also nur 10 Personen infizieren. Die Reproduktionsrate ist von 2 auf 1 gesunken. In der nächsten Periode sind dann 20 Personen infiziert, von den 100 Kontaktpersonen sind jetzt 60 immun, selbst infiziert oder geimpft. Das Virus würde gerne 20 weitere Personen anstecken, hat aber nur bei 8 Personen Erfolg. Die Reproduktionsrate sinkt auf 0,8.

Es wird deutlich, dass je größer der Anteil der Personen, der nicht mehr angesteckt werden kann ist, desto niedriger wird die Reproduktionszahl, um irgendwann bis auf Null zu sinken.

Die obige Berechnung ist eine sehr vereinfachte Darstellung, die aber im Prinzip so ähnlich funktioniert. Um ein tiefergehendes Verständnis zu bekommen, will ich einige Begriffe und Einschränkungen genauer erläutern:

Reproduktionszahl R: Es wird unterschieden zwischen der Basisreproduktionszahl und der Nettoproduktionszahl. Die Basisreproduktionszahl R_0 gibt an, wie viele Personen im Durchschnitt von einer Person angesteckt werden, wenn die gesamte Bevölkerung noch infizierbar ist. Beim Coronavirus beträgt R_0 den Wert 3,5. Die Nettoproduktionszahl R gibt an, wie viele Personen aktuell bei vorhandener Immunität und existierender Vorsichtsmaßnahmen durchschnittlich von einer Person angesteckt werden. Zur Berechnung werden die Summen der Neuerkrankten aus zwei Zeiträumen von 4 Tagen, die vier Tage vor dem aktuellen Datum liegen dividiert.

Beispiel: Am 15. Dezember beträgt die Reproduktionszahl 150. Das wurde wie folgt berechnet:
In der Zeit vom 8. 12. bis zum 11. 12. wurden insgesamt 90 000 Neuerkrankte gezählt.
In der Zeit vom 4.12 bis zum 7.12 wurden insgesamt 60 000 Neuerkrankte gezählt.
Die Division $90\ 000 : 60\ 000$ ergibt die Reproduktionszahl R von 1,5.

Wenn die Reproduktionszahl größer ist als 1, dann nimmt die Zahl der Neuerkrankungen zu, wenn sie unter 1 liegt, dann sinkt die Zahl der Neuerkrankungen und damit langfristig auch die Gesamtzahl der Erkrankten.

Inzidenz: Die Summe der Neuerkrankten der letzten 7 Tage wird durch die Gesamtzahl der Bevölkerung in einer Region geteilt. Das Ergebnis wird dann mit 100 000 multipliziert.

Beispiel: In einem Landkreis mit 200 000 Einwohnern wurden in den letzten 7 Tage insgesamt 500 Neuerkrankte gezählt. Das ergibt folgende Inzidenz: $500 : 200\ 000 \times 100\ 000 = 250$.

In der Wissenschaft gibt es verschiedene mathematische Modelle, um den Verlauf einer Epidemie zu berechnen. Dabei werden folgende Abkürzungen verwendet.

N = Gesamtbevölkerung (84 Millionen in der BRD)

S = Anzahl der noch infizierbaren Personen (noch nicht erkrankt oder geimpft)

R = Anzahl der nicht mehr infizierbaren (geimpft oder nach Infektion wieder gesund)

I = Anzahl der Personen, die aktuell infiziert und ansteckend sind

Es gilt: $N = S + R + I$

Die **Immunitätsrate** beschreibt den Anteil derjenigen Personen an der Gesamtbevölkerung, die nicht mehr infiziert werden können.

Diese berechnet sich dann durch $R : N$

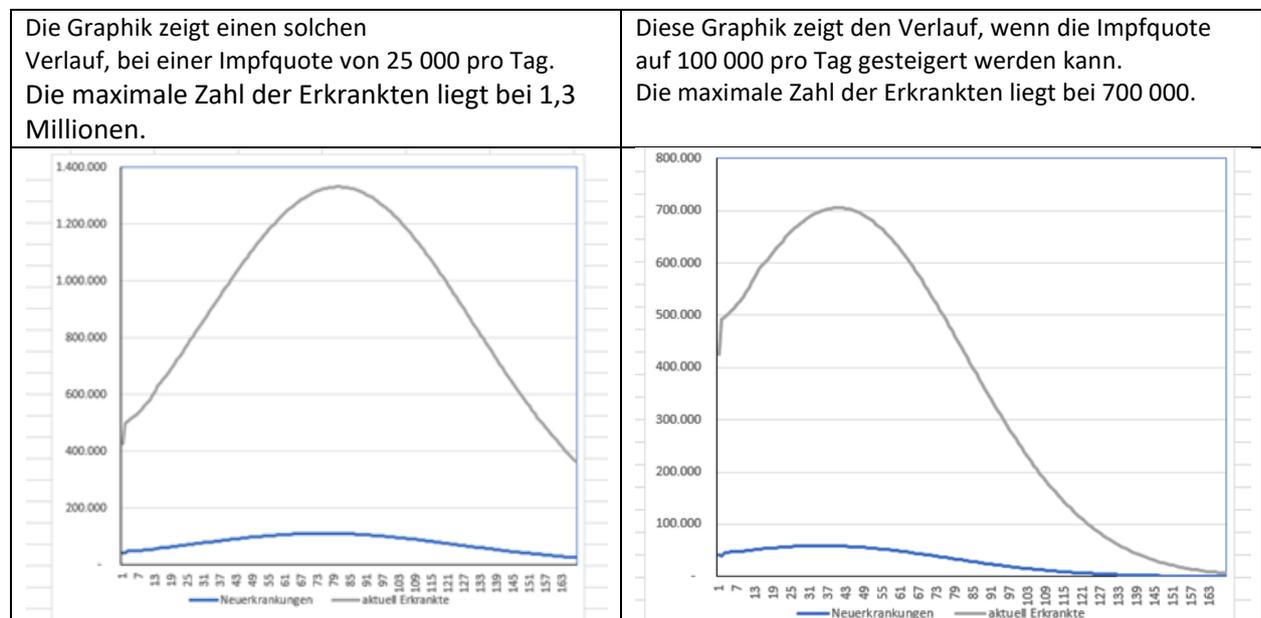
Beispiel: $N = 100$, $R = 5$ dann beträgt die Immunitätsrate $5 : 100 = 0,05$ oder 5 %.

Bei allen Berechnungen muss berücksichtigt werden, dass die theoretischen Zahlen durch viele Einflussfaktoren verändert werden können. Beispielsweise kann die Reproduktionszahl durch zusätzliche Lockdownmaßnahmen vermindert werden, kann aber auch durch lokale Ereignisse (Feiern, Feste, usw.) wieder ansteigen. Eine Mutation des Virus kann die Wirksamkeit des Impfstoffes beeinflussen oder die Zeiträume für Inkubation, Infizierbarkeit oder die Dauer der Erkrankung beeinflussen.

Anfang Januar 2021 gab es in Deutschland etwa 1,5 Millionen Menschen, die bereits mit Corona infiziert waren. Davon waren ca. 1,1 Millionen wieder genesen. Danach gab es ca. 400 000 Personen, die aktuell erkrankt waren, Wir angenommen wird, dass von diesen etwa die Hälfte noch ansteckend war, dann waren zu diesem Zeitpunkt etwa 1,3 Millionen Menschen nicht mehr infizierbar. Das entspricht einer Immunitätsrate von $1,1 = 84 = 0,0131$ oder 1,31 %. Dabei sind noch keine Impfungen berücksichtigt.

400 000 aktuell Infizierte, von denen ein bestimmter Anteil in stationärer Behandlung ist, bringen unser Gesundheitssystem an seine Grenze. Es ist klar: Viel höher darf diese Zahl nicht steigen. Wenn die 7-Tage Inzidenz, die aktuell (8. Januar) bei ca. 137 liegt, wesentlich höher wäre, dann würde zwar die Immunitätsrate durch die höhere Zahl der Erkrankten viel schneller ansteigen und damit den Rückgang der Inzidenz beschleunigen, allerdings würde die Anzahl der Erkrankten derart ansteigen, dass das Gesundheitssystem nicht mehr in der Lage wäre, diese noch zu versorgen.

Deshalb muss Alles getan werden, um die Reproduktionsrate und damit die Inzidenz möglichst niedrig zu halten. Wenn über eine längere Zeit die Anzahl der wieder Genesenen zusammen mit der Anzahl der Geimpften die Anzahl der Neuerkrankungen übersteigt, dann ist nach etwa einem halben Jahr mit einem Verschwinden der Pandemie zu rechnen.



Die Modelle zeigen aber auch, dass die Idee, durch eine Herdenimmunität könne man die Krise lösen, nicht durchführbar ist. Damit eine Herdenimmunität erreicht wird, müssen viel zu viele Menschen erkranken. Die Zahl der Neuerkrankungen müsste dramatisch ansteigen, das Gesundheitssystem wäre völlig überfordert. Je nach Höhe der Reproduktionszahl beginnt die Herdenimmunität einzusetzen, wenn etwa 20 bis 40 % der Menschen infiziert sind.

Wenn durch Lockdownmaßnahmen die Reproduktionsrate möglichst niedrig gehalten werden, Dann wird die Zahl der Neuerkrankten sinken und damit auch die Anzahl der aktuell Erkrankten. Je mehr geimpft wird, desto schneller geht das. Allerdings ist dann die Zahl derjenigen, die infiziert worden sind, immer noch ziemlich gering und die Gefahr eines neuen Ausbruchs ist vorhanden. D. h. auch wenn die Krankheit scheinbar vorbei ist, muss unbedingt weiter geimpft werden.