Medizinische Tests – Der Fall Gnabry

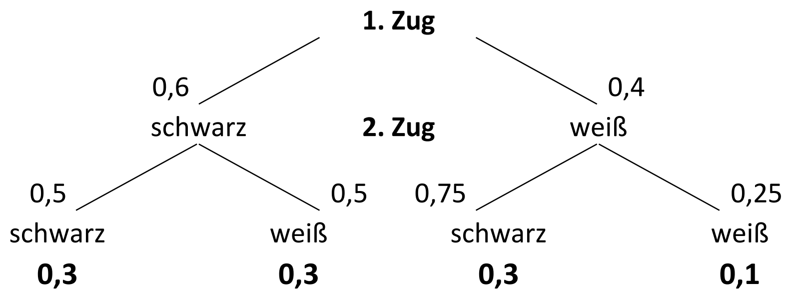
Im Oktober 2020 ging durch die Presse, dass der Fußballnationalspieler Serge Gnabry positiv auf Covid 19 getestet wurde. Daraufhin konnte er nicht an einem Länderspiel teilnehmen und musste in Quarantäne. Einige Tage später ergab sich, dass der Test ein falsches Ergebnis ausgewiesen hatte. Ein weiterer Test ergab, dass Gnabry nicht infiziert war.
Daraufhin war in der Presse vom „Corona-Chaos“ und „Verwirrung“ die Rede.

Es soll untersucht werden, ob es sich hier wirklich um eine chaotische Vorgehensweise gehandelt hat, oder ob solch ein Vorfall nicht sogar zwangsläufig häufig eintreten muss.

Zunächst ein paar theoretische Grundlagen, die erforderlich sind, um das stochastische Vorgehen zu verstehen.
Man benötigt die Begriffe **Vierfeldertafel**, **Baumdiagramm** und die **Formel von Bayes**.

Zwei Ereignisse, die miteinander in Verbindung gebracht werden und zu denen jeweils Wahrscheinlichkeiten für ihr Eintreten bzw. Nichteintreten gehören, können als Baumdiagramm oder in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

Beispiel: In einer Schale liegen 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Es werden nacheinander 2 Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird. Die Ergebnisse werden in einem **Baumdiagramm** und in einer Vierfeldertafel dargestellt.



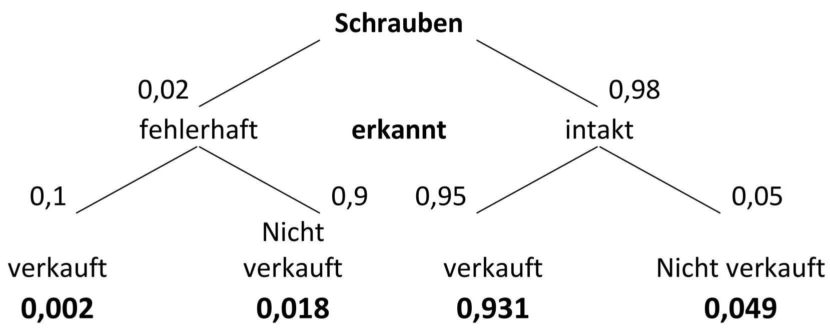
Die Zahlen in der unteren Reihe ergeben sich aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei weiße Kugeln gezogen werden liegt beispielsweise bei 0,4 x 0,25 = 0,1 (10 %).
Übertragen in eine Vierfeldertafel ergibt sich folgendes Bild. Die Zahlen in den Zellen ergeben sich aus der Wahrscheinlichkeit, dass sowohl das Spalten- als auch das Zeilenereignis eintritt. Wenn die Zellenwahrscheinlichkeiten das Produkt aus Zeilen- und Spaltensumme sind, dann sind beide Ereignisse (hier: 1. Zug und 2. Zug) voneinander unabhängig. Dies ist hier nicht der Fall, da das Ergebnis des 2. Zuges vom Ergebnis des 1. Zuges abhängt. Die Zahlen der Vierfeldertafel ergeben sich auch aus der unteren Zeile des Baumdiagramms.

Vierfeldertafel

	schwarz	weiß	∑
schwarz	0,3	0,3	0,6
weiß	0,3	0,1	0,4
∑	0,6	0,4	1,0

Beispiel 2.
2 Prozent der Teile einer Produktion sind fehlerhaft. Von den intakten Teilen werden 95 % verkauft. Von den fehlerhaften Teilen gelangen 10 Prozent in den Verkauf.

Darstellung als Baumdiagramm



Die Zahlen unterhalb des Baumdiagramms ergeben sich aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades. Symbolisch ausgedrückt:
P(fehlerhaft ^ fehlerhaft) = 0,018
Und-Verknüpfung : Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil fehlerhaft <u>und</u> erkannt wird

Alle diese Und-Verknüpfungen, die sich aus der Multiplikation entlang eines Pfades ergeben werden in der Vierfeldertafel dargestellt.

	fehlerhaft	intakt	∑
Verkauft	0,018	0,931	0,949
Nicht verkauft	0,002	0,049	0,051
∑	0,02	0,98	1

Erläuterung für die Zahl 0,049: 98 Prozent der Teile sind intakt. Die Wahrscheinlichkeit das ein intaktes Teil nicht verkauft wird liegt bei 4,9 %. 0,98 x 0,05 = 0,049.

Mathematisch werden hier zwei Ereignisse mit dem und-Zeichen verknüpft.
P(intakt ^ nicht verkauft)

Aus der Vierfeldertafel lassen sich nun noch weitere Fragen beantworten:

1. Teil wird verkauft.
2. Schraube ist verkauft und intakt.
3. Ein fehlerhaftes Teil wird verkauft.
4. Ein verkauftes Teil ist intakt.
5. Ein verkauftes Teil ist fehlerhaft.

Zu 1. Die Summenspalte für die 1. Zeile zeigt an, dass 94,9 % aller Teile verkauft werden.
Zu 2. Die Pfadwahrscheinlichkeit dafür entspricht dem Wert 0,931, also 93,1 %.
Zu 3. Die Pfadwahrscheinlich P(fehlerhaft ^ verkauft) ergibt den Wert 1,8 %
Zu 4. Achtung! Die Ermittlung dieses Wertes ist nicht identisch mit Frage 2. Es handelt sich hier um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, deren Wert nicht unmittelbar aus der Tafel abgelesen werden kann:

P(intakt / verkauft) oder $P_{verkauft}$(intakt) Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube intakt ist unter der Bedingung, dass sie verkauft wurde.

Es handelt sich dabei um eine sog. **a posteriori-Wahrscheinlichkeit**, die mit der Formel von Bayes berechnet werden kann.

Formel von Bayes $P_I(A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(I)}$

Bedeutet: Die a posteriori-Wahrscheinlichkeit einer Alternative ergibt aus dem Quotienten der Pfadwahrscheinlichkeit (Eintrag in der Tafel bzw. Produkt der Wahrscheinlichkeiten eines Pfades des Baumdiagramms) und der totalen Wahrscheinlichkeit des Indizes (hier sind das die verkauften Teile)

Also $P_{verkauft}$(intakt) = $\frac{0{,}931}{0{,}949} = 0{,}98103$ oder 98,1 %

Zu 5. Analog zu Frage 4 $P_{verkauft}$(fehlerhaft) = 0,018 : 0,949 = 0,01897 oder 1,9 %

Nun zurück zum Fall Gnabry:
Es werden folgende Annahmen getroffen, die ungefähr den realen Werten entsprechen:
Es seien etwa 1 % der Testpersonen infiziert. Ein PCR-Test testet 98 % der Infizierten als positiv (**Sensitivität)** und 96 % der nicht-Infizierten als negativ (**Spezifität**).
Es kann folgende Vierfeldertafel erstellt werden:

	infiziert	nicht infiziert	∑
Test positiv	0,0098	0,0396	0,0494
Test negativ	0,0002	0,9504	0,9506
∑	0,01	0,99	1

Sensitivität: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Testergebnis positiv ist, wenn eine Person infiziert ist.
Spezifität: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Testergebnis negativ ist, wenn eine Person nicht infiziert ist.

Wenn die Frage beantwortet werden soll, wie wahrscheinlich es ist, dass ein positiv Getesteter nicht infiziert ist, dann haben wir wieder eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die mit der Bayes-Formel berechnet werden kann.

P_{positv}(nicht infiziert) = 0,0396 : 0,0494 = 0,8016 oder etwa 80 %

Das bedeutet, dass ein als positiv Getesteter mit der großen Wahrscheinlichkeit von 80 % gar nicht infiziert ist.
Andererseits ist ein positiv Getesteter nur mit 20 % iger Sicherheit tatsächlich infiziert.
Jemand der allerdings negativ getestet wurde kann sich zu 99,98 % sicher sein, dass er tatsächlich nicht infiziert ist.

Es ist also so, dass lediglich negative Testergebnisse sehr verlässlich sind. Positive Testergebnisse müssen immer durch mindestens einen zweiten Test abgesichert werden.

In der Praxis werden bei einem PCR-Test aber mehrere Gen-Orte getestet, sodass die Fehlerwahrscheinlichkeit von 2 % deutlich gesenkt werden kann.

Dabei werden die errechneten a posteriori-Wahrscheinlichkeiten zu den neuen a priori-Wahrscheinlichkeiten und eine analoge Rechnung wird durchgeführt.

	M1 ja	M1 nein	∑
M2 ja	0,1943	0,0040	0,1983
M2 nein	0,0321	0,7696	0,8016
∑	0,2264	0,7735	1,0000

0,0321 / 0,2264 = 0,1418 oder 14,18 %
0.1943 / 0,2264 = 0, 8582 oder 85,82 %

Diese ergibt bei einem zweistufigen Test eine Wahrscheinlichkeit von 14,18 %, dass der positiv getestete nicht infiziert ist und eine Wahrscheinlichkeit von 85,82 %, dass das positive Testergebnis stimmt.
Antikörper-Schnelltests, wie sie oft bei Massentestungen (Flughafen) eingesetzt werden, haben in der Regel eine geringere Sicherheit, so dass die Fehlerrate beim ersten Test noch höher ist. Allerdings behaupten einige Hersteller, dass ein Schnelltest eine Spezifität von 99,68 % und eine Sensitivität von 96,52 % erreichen kann.
In diesem Fall werden so gut wie alle Infizierten erkannt. Allerdings ist immer noch die Wahrscheinlichkeit sehr hoch, dass jemand irrtümlich positiv getestet wird.

Fazit: Sichere Ergebnisse liefern nur mehrstufige Tests. Wer positiv getestet ist, muss sich auf jeden Fall noch ein 2. Mal testen lassen, um sicher sein zu können. Je geringer der Anteil der Infizierten ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit für ein falsches positives Testergebnis.

Geht es auch (fast) ohne Mathematik?
Zugegeben, das Ganze war recht kompliziert und umständlich. Stochastik ist aber manchmal so. Viele Dinge muss man erst mehrfach durcharbeiten, um sie richtig zu verstehen. Allzu leicht formuliert man Bedingungen oder Wahrscheinlichkeiten nicht exakt und produziert damit falsche Ergebnisse.
Im Fall Gnabry kommt man allerdings auch mit dem sog. gesunden Menschenverstand zum Ziel.
Wenn 1 % der Untersuchten infiziert sind, sind dass 100 von 10 000 Personen.
Davon werden durch den Test 98 (98 %) als positiv erkannt.
Von den 9900 nicht infizierten werden 9504 (96 %) als solche erkannt. Also werden die restlichen 396 positiv getestet. Damit haben wir 495 Personen, die positiv getestet sind, von denen aber nur 99 tatsächlich infiziert sind. D.h. 20 Prozent der positiv getesteten sind falsch positiv getestet.